Samenvatting Metrische Ruimten

Daniël (mail= struiks@gmail.com)

1 Introduction

Dit is een samenvatting van de stof van Metrische Ruimten, zoals gegeven in het collegejaar 2012-2013. De eerste hoofdstukken over elementaire verzamelingstheorie en de hoofdstukken die analyse herhalen heb ik weggelaten.

2 Metric Spaces

Een **metrische ruimte** is niets anders dan een niet-lege verzameling X, waarvoor een 'distance'-functie $d : X \times X \to \mathbb{R}$ gedefinieerd is, en waarbij moet worden voldaan aan de volgende drie axioma's:

1. De waarde is nooit negatief: Voor alle elementen $x, y \in X$ geldt dat de 'distance' groter dan 0 is: $d(x, y) \geq 0$, bovendien moet gelden $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. Symmetrie: $d(x, y) = d(y, x)$ voor alle $x, y \in X$
3. Driehoeksongelijkheid: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ voor alle willekeurige $x, y, z \in X$

De reden dat we metrische ruimten bestuderen is omdat we het begrip continuiteit willen veralgemeniseren. Gegeven twee metrische ruimten, X en Y met bijbehorende functie d_X en d_Y, en een afbeelding $f : X \to Y$ kunnen we continuiteit als volgt definiëren:

Definition 2.1. f is continu op $a \in X$ als voor elke gegeven $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ bestaat, zodat $d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon$ als $d_X(x, a) < \delta$. De functie f heet continu indien de functie continu is op alle punten $a \in X$

2.1 Voorbeelden van Metrische Ruimten

Om aan te tonen dat een verzameling met bijbehorende distance functie een metrische ruimte is, moet je aantonen dat de bijbehorende gedefinieerde distancefunctie voldoet aan de drie axioma's. Vaak is het niet moeilijk om te laten zien dat de eerste en tweede axioma gelden, maar zit de moeilijkheid hem in het aantonen van de derde. Dit vereist oefening! Om wat gevoel te krijgen voor metrische ruimten volgen nu nog wat voorbeelden.

Een voorbeeld van een metrische ruimte is (natuurlijk) de Eucldische ruimte $(\mathbb{R}^n, d)$. Voor twee willekeurige punten $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ en $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ is de distancefunctie gedefinieerd als

$$d(x, y) = d(y, x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Een ander voorbeeld is de complexe ruimte $\mathbb{C}$, waarbij $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$. Om te zien dat axioma 3 geldt, kun je elk complex getal uitdrukken in termen van zijn reële en imaginaire deel, zodat de driehoeksongelijkheid voor $\mathbb{C}, |z_1 - z_3| \leq |z_1 - z_2| + |z_2 - z_3|$ samenvalt met de driehoeksongelijkheid voor $\mathbb{R}^2$

Je kunt ook andere definities hanteren voor het begrip afstand in de Euclidische Ruimte. Neem bijvoorbeeld $X = \mathbb{R}^2$, en $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$. Definieer nu

$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

Dat voldaan is aan axioma's 1 en 2 is triviaal. Om axioma 3 te controleren nemen we een $c = (c_1, c_2)$. Dan

$$d(x, y) + d(y, z) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |y_1 - z_1| + |y_1 - z_2|$$

$$= |x_1 - y_1| + |y_1 - z_1| + |x_2 - y_2| + |y_2 - z_2|$$
$$\geq |x_1 - z_1| + |x_2 - z_2| = d(x, z)$$

In het boek is een aantal andere minder voor de hand liggende voorbeelden te vinden.

2.2 Eigenschappen van continue functies op Metrische Ruimten

Uit de reële analyse weten we dat als $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue functies zijn op het punt $a \in \mathbb{R}$, dan zijn ook $|f|, f + g, fg$ en $\frac{f}{g}$ continue functies. Deze eigenschap, waarbij continuiteit van samengestelde functies, geldt nog steeds voor functies op metrische ruimten.

Proposition 1. Stel $f, g : X \to \mathbb{R}$ zijn continue reële functies op een metrische ruimte (X, d), dan zijn $|f|, f + g, fg$ en $\frac{f}{g}$ dit ook.

Proof. Laat d de metriek zijn op X. Dan kun je de continuiteit van de vier samenstellingen aantonen door de bewijzen van het reële geval over te schrijven, waarbij je elke $'|x-a| < \delta'$ vervangt door $'d(x, a) < \delta'$. Daarnaast moet het domein $\mathbb{R}$ natuurlijk vervangen worden door de metrische ruimte X.

Voorbeeldje: Gegeven $f : X \to \mathbb{R}$ op een metrische ruimte (X, d), laat zien dat $|f|$ continu is. Laat $\epsilon > 0$. Omdat f continu is weten we dat er een $\delta > 0$ bestaat zodat $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ indien $d(x, a) < \delta$. Gebruik nu omgekeerde driehoeksongelijkheid: wanneer $d(x, a) < \delta$ hebben we

$$||f|(x) - |f|(a)| = ||f(x)| - |f(a)|| \leq |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

□

Hier moeten nog wat eigenschappen komen

Definition 2.2. De diagonal map $\Delta : X \to X \times X$ van een willekeurige verzameling X is de afbeeelding gedefinieerd als $\Delta(x) = (x, x)$

Deze afbeelding is altijd continu voor een metrische ruimte X, met bijbehorende metriek d_X.

Proof. Om dit te zien passen we de al eerder genoemde metriek $d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ toe op $X \times X$, zodat $d_1((x_1,x_2),(x_1',x_2')) = d_X(x_1,x_1') + d_X(x_2,x_2')$. Laat nu $\epsilon > 0$, en neem $\delta = \epsilon/2$. Als $d_X(x,x') < \delta$ hebben we

$$d_1(\Delta(x),\Delta(x')) = d_1((x,x),(x',x') = d_X(x,x') + d_X(x,x') < \epsilon$$

□

2.3 Begrensde Verzamelingen In Metrische Ruimten

Hier volgen wat definities over bounded sets, wat intuitief overeenkomt met de Euclidische versie.

Definition 2.3. Een deelverzameling $S \subset (X,d)$ is begrensd indien er een $a \in X$ en een $M \in \mathbb{R}$ bestaan zodat $d(x,a) \leq M$ voor alle $x \in S$

Definition 2.4. Als S een niet lege begrensde deelverzameling is van (X,d), dan is de diameter van S, $Diam_S = \sup\{d(x,y) : x,y \in S\}$

Definition 2.5. Stel $f : S \to X$ is een afbeelding van een verzameling S naar een metrische ruimte X, dan noemen we f begrensd indien de deelverzameling $f(S)$ van X begrensd is.

De vereniging van een eindig aantal begrensde deelverzamelingen van een metrische ruimten is begrensd, zoals je dat ook zou verwachten met de kennis van de reële analyse.

2.4 Open Balls

Definition 2.6. Een open ball in een metrische ruimte (X,d) met radius $r > 0$, gecentreerd rond het punt $x_0 \in X$, is gedefinieerd als de verzameling

$$B_r(x_0) = \{x \in X : d(x,x_0) < r\}$$

De 'open ball' is een uitbreiding van bijvoorbeeld de open verzameling in het reële vlak, waar $B_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r)$.

In $\mathbb{R}^3$, met metriek $d = d_2$ is $B_r(x_0)$ de verzameling punten die strict binnen de bol van straal r (en niet op de rand), gecentreerd rondom x_0 liggen.

Hoewel een open ball aan iets ronds doet denken, kan een vierkant ook prima een open ball zijn. Beschouw bijvoorbeeld $X = \mathbb{R}^2, d = d_1$. Hierbij is $B_r(x_0)$ het binnenste van het vierkant gecentreerd rondom x_0 met diagonalen van lengte $2r$.

Proposition 2. Gegeven een open ball $B_r(x)$ in een metrische ruimte (X,d) en een punt $y \in (X,d)$, bestaat er een $\epsilon > 0$ zodat $B_\epsilon(y) \subseteq B_r(x)$

2.5 Open verzameling in metrische ruimten

Definition 2.7. Als U een deelverzameling is van een metrische ruimte (X, d), dan noem je U open als voor elk element $x \in U$ er een $\epsilon > 0$ bestaat zodat $B_\epsilon \subseteq U$

Door deze definite toe te passen op de eigenschap die daarvoor genoemd werd, blijkt dat elke open ball in een metrische ruimte X open is in X.

Proposition 3. Stel dat $f : X \to Y$ een afbeelding is van metrische ruimten. Dan is f continu dan en slechts dan als f^{-1}(U) open is in X indien U open is in Y

Proposition 4. De intersection van een eindig aantal open deelverzamgelinen van een metrische ruimte is open

Proposition 5. De vereniging van een eindig aantal open deelverzamelingen van een metrische ruimte is open

3 More Concepts in metric spaces

3.1 Gesloten deelverzamelingen

Definition 3.1. Een deelverzameling V van een metrische ruimte X is **closed** in $X \setminus V$ open is in X

Hierbij verwijst open naar de definitie die stelt dat er in een open verzameling voor elk element een open ball rondom dat element te vinden is. Voorbeelden van closed sets zijn naast de gesloten circelschijf, de gesloten rechthoek de discrete metrische ruimte X: elke deelverzameling van X is gesloten in X.

Proposition 6. Zoals in de analyse geldt dat zowel de vereniging, $V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_n$, als de intersection $V_1 \cap V_2 \cap ... \cap V_n$ van gesloten verzamelingen een gesloten verzameling is. Verder geldt dat de lege verzameling $\emptyset$ en de gehele verzameling X gesloten zijn in de metrische ruimte X

Proposition 7. Als X en Y metrische ruimten zijn en $f : X \to Y$ is een afbeelding, dan is deze functie f continu $\iff$ $f^{-1}(V)$ is gesloten in X wanneer V gesloten is in Y

Belangrijk is om je te realiseren dat deelverzamelingen in metrische ruimten vaak niet gesloten of open zijn, maar geen van beiden.

3.2 Closure van deelverzamelingen

Deelverzamelingen van een metrische ruimte X zijn vaak niet open en niet gesloten. Om van een deelverzameling een gesloten verzameling te maken moet je - net als in de analyse - zijn closure toevoegen aan de verzameling. Gesloten verzamelingen bevatten per definitie hun closure.

Definition 3.2. Als A een deelverzameling is van een metrische ruimte X en $x \in X$, dan is x een punt van de **closure** van A in X indien voor een gegeven $\epsilon > 0$ geldt dat $B_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset$. Oftewel als je een open ball rondom het element van de closure produceert, met een willekeurig kleine straal, dan zit er altijd wel een elementje van A in die open ball, hoe klein je de open ball ook neemt.

De closure van een deelverzameling wordt gebruikt om het begrip 'dense' te definiëren.

Definition 3.3. Een deelverzameling $A \subset X$ is **dense** in X indien $\overline{A} = X$

Voorbeelden hiervan zijn bijvoorbeeld $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ die allebei dense zijn in $\mathbb{R}$, zoals wellicht bekend uit de theorie van de analyse.

Proposition 8. $\overline{A}$ is de kleinste gesloten deelverzameling van X die A bevat

Proof. Dit betekent dat $A \subseteq \overline{A}$ en dat als B een gesloten deelverzameling in X is, zodat $A \subseteq B$ dan $\overline{A} \subseteq B$. Dus stel dat B zo'n gesloten verzameling is. Volgens proposition 6.11 b.) (pag. 63) geldt dat $\overline{A} \subseteq \overline{B}$. Maar $\overline{B} = B$, omdat B gesloten is, dus $\overline{A} \subseteq B$ □

Proposition 9. Een afbeelding $f : X \to Y$ van metrische ruimten is continu $\iff$ $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ voor elke $A \subseteq X$

3.3 Limit Points van deelverzamelingen

Hier ook geldt weer een veralgemenisering van het begrip limit point uit de analyse. Een limit point is een element in een deelverzameling, als er in de intersection van deze deelverzameling met een open ball van willekeurig kleine straal, een element is te vinden die in A zit, maar die niet het onderzochte punt zelf is. Iets wiskundiger:

Definition 3.4. $x \in X$ is een **limit point** van een deelverzameling A in X indien er voor gegeven $\epsilon > 0$ er een element, ongelijk aan x, bestaat in $B_\epsilon(X) \cap A$. Met andere woorden, x is een limit point indien $B_\epsilon(X) \setminus x \cap A \neq \emptyset$

De definitie van een limit point van een deelverzameling is zwakker dan de closure van een deelverzameling: een element in A zou een limit point kunnen zijn, maar is altijd een element van de closure van A. Dit is bijvoorbeeld te zien in het voorbeeld $A = [0, 1) \cup \{2\}$. De limit points van A zijn 0 en 1, terwijl $\overline{A} = [0, 1] \cup \{2\}$.

Het doel van de limit points is om te herkennen dat een deelverzameling gesloten is in X.

Proposition 10. Een deelverzameling A is gesloten $\iff$ A bevat all zijn limit points

Proposition 11. $\overline{A}$ is de vereniging van A met al zijn limit points

3.4 Interior en Boundary van subsets in metric spaces

3.5 Convergence in metric spaces

Definition 3.5. Een sequence (x_n) in een metrische ruimte X **convergeert** naar een punt $x \in X$ als voor elke gegeven $\epsilon > 0$ er een getal $N \in \mathbb{N}$ bestaat zodanig dat $x_n \in B_\epsilon(x)$ voor alle $n \geq N$

Deze limiet x is uniek.

Proof. Stel dat (x_n) naar zowel x als y convergeren, met $x \neq y$. Laat $\epsilon = d(x, y)/2$. Dan zijn $B_\epsilon(x)$ en $B_\epsilon(y)$ disjoint. x_n zou moeten behoren tot beide open balls indien je n groot genoeg neemt, en we hebben dus een contradiction. Dus x_n convergeert niet naar zowel x als y. □

.

Definition 3.6. Een sequence (x_n) in een metrische ruimte (X, d) heet een **Cauchy sequence** indien voor een gegeven $\epsilon > 0$ er een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zodat $d(x_m, x_n) < \epsilon$ voor alle gevallen waarbij $m, n \geq N$.

Er geldt hierbij ook dat elke convergende sequence in een metrische ruimte een Cauchy sequence is.

Proposition 12. Als $Y \subset X$ en (y_n) is een sequence in Y die convergeert naar een punt $x \in X$, dan $x \in \overline{Y}$

Proof. (y_n) convergeert naar x, dus voor elke $\epsilon > 0$ hebben we $y_n \in B_\epsilon(x)$ voor n groot genoeg, en y_n is een punt van Y. Dus x zit in the closure $\overline{Y}$ van X □

4 Connected spaces

In dit hoofdstuk worden twee verschillende definities van connectedness gegeven. De eerste definitie wordt vooral gebruikt om continuiteit te bestuderen, terwijl de tweede (path-connectedness) meer intuitief aanvoelt. Om te laten zien dat twee spaces niet homeomorphic zijn, kun je proberen aan te tonen dat de ene space connected is, en de andere niet.

4.1 Connectedness

Definition 4.1. Een metric space X is **connected** indien er geen continue afbeelding bestaat van X naar een twee-punten discrete ruimte, bijvoorbeeld $\{0, 1\} \subset \mathbb{R}$. Je kunt ook stellen dat X connected is, indien elke continue afbeelding van X naar een twee-punten discrete ruimte constant is.

Definition 4.2. Een **partitie** A, B van een metrische ruimte X is een tweetal deelverzamelingen van X, zodanig dat $A \cap B = \emptyset$ en $A \cup B = X$ en beiden zijn open in X.

Beide verzamelingen zijn ook gesloten in X, aangezien het elkaars complementen zijn.

Proposition 13. Een metrische ruimte is connected $\iff$ er bestaat geen partitie in de metrische ruimte

Proof. Dit bewijzen we door te laten zien dat X disconnected is dan en slechts dan als er wel een partitie te vinden is in de metrische ruimte.

Neem aan dat A, B een partitie is van X. Defineer $f : X \to \{0, 1\}$ door $f(x) = 0$ als $x \in A$ en $f(x) = 1$ als $x \in B.f$ is onto, omdat A en B niet-leeg zijn. Alle openverzamelingen van $0, 1$ zijn $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}$. De inverse (of pre) images van deze verzamelingen onder f zijn $\emptyset, A, B, X$ die allemaal open zijn in X, dus f is continu. Volgens de definitie van connectness aan het begin van dit hoofdstuk, is X niet connected.

De andere kant op: Stel dat X disconnected is, en dat er dus een continue afbeelding bestaat$f : X \to \{0, 1\}$ van X naar de discrete twee-punten ruimte. Dan is het gemakkelijk om te zien dat $f^{-1}(0), f^{-1}(1)$ een partitie is van X □

Proposition 14. Een metrische ruimte X is connected $\iff$ de enige deelverzamelingen die zowel open als gesloten zijn in X zijn $X, \emptyset$

Proof. Bewijs dat X disconnected is dan en slechts dan als er een niet lege verzameling, ongelijk aan X zelf, bestaat in X die zowel open als gesloten is. Als A, B een partitie is van X, dan zijn A en B zowel open als gesloten in X, en geen van beiden zijn X zelf of de lege verzameling $\emptyset$. Andersom, als A open en gesloten is in X en het is niet $\emptyset$ noch X, dan is $A, X \setminus A$ een partitie van X. $\square$

4.2 Intervals of the real line

Het volgende gedeelte gaat over connected subspaces van de reële getallenlijn. Het doel van het boek is om te laten zien dat connected subspaces van de real line precies de intervallen zijn waar in hoofdstuk 2 over wordt gesproken.

Proposition 15. Een niet-lege verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$ is een interval $\iff$ het voldoet aan de eigenschap: als $x, y \in S, z \in \mathbb{R} : x < z < y \implies z \in S$

Proposition 16. Elke connected subspace S van $\mathbb{R}$ is interval, en elk interval I van $\mathbb{R}$ is een connected subset.

Een voorbeeld van een gevolg van deze stelling: we weten dat $\sqrt{2}$ geen rationaal getal is. Beschouw nu $\{x \in \mathbb{Q} | x < \sqrt{2}\} \cup \{x \in \mathbb{Q} | x < \sqrt{2}\}$. Hieruit volgt, dat het geen interval is, en dat dus $\mathbb{Q}$ geen connected subspace is van $\mathbb{R}$.

Proposition 17. Stel dat $f : X \to Y$ een continue afbeelding is van metrische ruimten en dat X connected is, dan is $f(X)$ connected.

Hier mist nog de informatie uit bladzijde 118 en 119.

4.3 Path-connectedness

Nu gaan we over tot de wat meer intuïtieve definitie van connectedness.

Definition 4.3. Voor de punten $x, y \in X$, is een **path** in X van x naar y een continue afbeelding $f : [0, 1] \to X$ zodanig dat $f(0) = x$ en $f(1) = y$.

Definition 4.4. Een metrische ruimte X is **path-connected** indien er van elke twee punten $x, y \in X$ een path gemaakt kan worden: dat er van elke twee punten een continu afbeelding bestaat zodanig dat het voldoet aan de definitie van een path.

Voorbeelden zijn bijvoorbeeld de bekende $\mathbb{R}^n$, of de annulus (wellicht bekend uit de complexe analyse), wat de verzameling elementen is in $\mathbb{R}^2$, ingesloten tussen twee cirkels: $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq (x^2 + y^2) \leq b\}, a, b \in \mathbb{R}$

4.4 Relatie tussen de twee definities

Wat is precies het verband tussen de eerste definitie van connectedness en de tweede definitie van path-connectedness?

Proposition 18. Een path-connected space X is connected

Dus om te bekijken of een metrische ruimte X connected is, hoef je alleen maar te checken of deze path-connected is.

Lemma 12.24 stelt dat als je een path hebt van x naar y, en een pad van y naar z, dan bestaat er een pad van x naar z.

De eigenschap dat elke pathconnected space connected is geldt niet zomaar andersom. Wel is het zo dat een connected open deelverzameling van een n-dimensionale euclidische ruimte $U \subset \mathbb{R}^n$ path-connected is.

4.5 Connectedness en homeomorphisms

Twee verzamelingen zijn homeomorf indien er een homeomorfisme tussen de twee verzamelingen bestaat. Een homeomorfisme is een bijectieve functie die aan beide kanten continu is. Het is

intuitief duidelijk dat $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$ niet homeomorphic zijn. Dit kun je bijvoorbeeld aantonen door contradictie: Stel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ is een homeomorfisme. Dit geeft aanleiding tot een ander homeomorfisme $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{f(0)\}$. Maar $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ is niet connected, terwijl $mathbbR^2$ met daarin n element weggelaten wel pathconnected is, en dus connected. Twee ruimten kunnen niet homeomorf zijn als de een wel connected is en de andere niet. Dus we hebben een tegenspraak, dus de aanname was onjuist.

Dezelfde redenering gaat vaker op. Beschouw bijvoorbeeld $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ en de cirkel $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$. Stel dat deze spaces homeomorf waren, dan induceert de bestaande functie $f : I \to S^1$ een homeomorphisme van $[0, 1/2) \cup (1/2, 1]$ naar $S^1 \setminus f(1/2)$. De eerste is disconnected, maar de tweede is pathconnected, en dus connected. Conclusie: geen homeomorphisme, dus de aanname was fout.

5 Compact spaces

Dit stuk behandelt compacte verzamelingen. Het doel is om een uitdrukking als "Een continue functie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ is begrensd op $[a, b]$" te generaliseren.

5.1 Definitie van Compactness

Om compactness te definiëren moet je enkele begrippen zoals **open cover** begrijpen. Ook is het handig om het begrip **family** te snappen: een family $\{U_i; i \in I\}$ is een verzameling van deelverzamelingen van een bepaalde verzameling X. Als $X = \{0, 1, 2, 3\}$, dan is een familie bijvoorbeeld $\{\{0, 1\}, \{2, 3\}\}$

Definition 5.1. Stel X is een verzameling en $A \subseteq X$. Dan is een (bepaalde) family $\mathcal{U} = \{U_i; i \in I\}$ van deelverzamelingen van X een **cover van A**, indien A in de vereniging van de elementen uit de family bevat is: dus als $A \subseteq \bigcup U_i$

Dus een cover van een verzameling A is een collectie van verzamelingen, zodat A een deelverzameling van de vereniging van verzamelingen in de collectie is. Een **subcover** (deeloverlapping) van $\mathcal{U}$ is gewoonweg een deelverzameling van $\mathcal{U}$ die A nog steeds overdekt.

Als $\mathcal{U} = \{U_i\}$ een cover is van een subset $A \subseteq X$, waarbij X een topologische ruimte is, en elke U_i is open in X, dan is $\mathcal{U}$ een open cover voor A. Verder noemen we een subcover eindig, indien $\mathcal{U}$ bestaat uit de vereniging van een eindig aantal verzamelingen.

En dan nu de definitie waar we op wachten:

Definition 5.2. Een deelverzameling A van een topologische ruimte X is **compact** indien elke open cover voor A een eindige subcover heeft.

Hiermee kun je bijvoorbeeld aantonen dat $(0,1) \subset \mathbb{R}$ niet compact is: Beschouw bijvoorbeeld de familie van open verzamelingen $\{(1/n, 1), n \in \mathbb{N}\}$. Deze overlapt $(0,1)$: voor elke x uit $(0,1)$ nemen we een n groot genoeg, zodanig dat $x > 1/n$, en dan geldt dat $x \in (1/n, 1)$. Maar als je een willekeurige eindige subfamily beschouwt, bijvoorbeeld $\{(1/n_1, 1), (1/n_2, 1), ..., (1/n_r, 1)\}$, dan overlapt deze verzameling slechts $(1/N, 1)$, waarbij $N = \max(n_1, n_2, ..., n_r)$ en dus $1/N > 0$. Dus het is niet zo da elke open cover van A een eindige subcover bevat, en dus is $(0,1)$ niet compact.

5.2 Eigenschappen van compact sets

Hier volgen een paar stellingen die je kunt gebruiken in je bewijzen die over compacte sets gaan.

Proposition 19. Elke compacte subset C van een metrische ruimte (X, d) is begrensd. Gevolg hiervan is bijvoorbeeld dat elke compacte deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ begrensd is.

Proposition 20. Als C een compacte deelverzameling is van een Hausdorff space X, dan is X gesloten in X. Een gevolg hiervan is dat elke compacte subset van $\mathbb{R}^n$ gesloten is in $\mathbb{R}^n$

Proposition 21. Als $f : X \to Y$ een continue functie is van topologische ruimten, en X is compact, dan is $f(X)$ compact. Elke continue afbeelding van een compacte set naar een metrische ruimte is begrensd

Proposition 22. Elke gesloten subset van een compacte space X is compact

Proposition 23. Elke gesloten, begrensde deelverzameling C van $\mathbb{R}^n$ is compact

6 Sequential Compactness

In de analyse vertelt the stelling van Bolzano-Weierstrass dat elke begrensde sequence van reële getallen minimaal één convergente subsequence bevat. In dit hoofdstuk wordt deze eigenschap gegeneraliseert naar metrische ruimten om een alternatieve benadering te geven om compactness van een bepaalde verzameling te bestuderen.

6.1 Sequential compactness van de reële getallen

Definition 6.1. Een subset $S \subseteq \mathbb{R}$ wordt **sequentially compact** genoemd indien elke sequence die in S zit, minimaal één subsequence bevat die naar een punt in S convergeert.

Hieruit volgt gemakkelijk de volgende stelling: Elke closed bounded subset $S \subseteq \mathbb{R}$ is sequentially compact.

Proof. Laat (x_n) een sequence in S zijn. S is closed en bounded, de sequence is dus begrensd, dus volgens de Bolzano-Weierstrass theorem is er een subsequence (x_{n_r}) te vinden die convergeert. S is gesloten in $\mathbb{R}$, dus het limiet van (x_{n_r}) ligt in S, wegens corollary 6.30 □

Andersom geldt dit ook: wanneer een subset van $\mathbb{R}$ gesloten en bounded is, dan is deze sequentially compact. Samengevat dus:

Proposition 24. Een subset $S \subseteq \mathbb{R}$ is sequentially compact $\iff$ S is closed en bounded in $\mathbb{R}$

Verder geldde ook in het vorige hoofdstuk dat wanneer een deelverzameling van $\mathbb{R}$ bounded en closed is, dat deze compact is. Kennelijk geldt dus het volgende:

Proposition 25. Een subset $S \subseteq \mathbb{R}$ is compact $\iff$ S is sequentially compact .

6.2 Sequential compactness for metric spaces

Definition 6.2. Een metrische ruimte X is **sequentially compact** indien elke sequence in X tenminste een subsequence heeft die naar een punt in X convergeert

Definition 6.3. Een niet-lege deelverzameling $A \subseteq X$ van een metrische ruimte (X, d) is sequentially compact indien, met de subspace metric d_A deze voldoet aan de hier boven genoemde definitie. (De empty set is sequentially compact)

Hieruit kan je bijvoorbeeld bewijzen dat elke eindige metric space sequentially compact is.

Proof. Neem een sequence in een eindige metrische ruimte X. Ten minste één punt uit die sequence die in X zit moet oneindig vaak worden herhaald in de sequence: het is immers een oneindige reeks van eindig verschillende elementen. Het voorkomen van zo'n oneindig repeterend punt geeft een constante, en dus convergerende, subsequence. $\square$

Een belangrijke stelling die in deze paragraaf uitgebreid bewezen wordt door middel van allerlei hulpstellingen is de volgende.

Proposition 26. Een metrische ruimte is compact $\iff$ de metrische ruimte is sequentially compact.

Om te bewijzen dat compact metric spaces sequentially compact zijn is dit lemma handig: Als (x_n) een sequence is in X en $x \in X$. Stel dat voor iedere $\epsilon > 0$ de neighborhood $B_\epsilon(x)(x_n)$ bevat voor oneindig veel waarden van n (en n groot genoeg), dan heeft (x_n) een subsequence die convergeert naar x. Een voorbeeld hiervan is 1, 1, 2, 1/2, 3, 1/3, ..., $n, 1/n$, ... Als je hier $n > 1/\epsilon$ neemt en je beschouwt $B_\epsilon(0)$, dan weet je dus dat er een subsequence bestaat binnen deze sequence die naar 0 convergeert, door het gebruik van dit lemma.

Een gevolg hiervan is dat als een sequence (x_n) in X geen convergerende subsequence heeft, dat voor elke $x \in X$ er wel een $\epsilon_x > 0$ bestaat zodanig dat $B_\epsilon(x)$ alleen voor een eindig aantal n's elementen uit de sequence (x_n) bevat. Dit is bijvoorbeeld het geval bij de sequence 1, 2, 3, 4, ... ,n, ... in $\mathbb{R}$, en voor elke $x \in \mathbb{R}$ kunnen we $\epsilon_x = 1$ nemen. De neighborhood $B_\epsilon(x)$ bevat maximaal slechts 2 elementen.

Proposition 27. Elke compacte subset X in een metrische ruimte Y sequentially compact is.

Proof. Stel X is een compacte subset in een metrische ruimte Y. Neem aan dat (x_n) geen convergerende subsequence heeft in X. Hieruit volgt (zie alinea hierboven) dat er voor elke $x \in X$ een $\epsilon_x > 0$ bestaat zodat $B_\epsilon(x)$ (x_n) bevat voor slechts een eindig aantal n's. Aangezien X compact is, laten we $\{b_{\epsilon_x}(x) : x \in X\}$ een open cover zijn voor X. Dan is er een eindige subcover. Elke verzameling in deze eindige subcover bevat x_n voor slechts een eindig aantal n's. Dit is natuurlijk onzin aangezien (x_n) een sequence is in X. Dus (x_n) moet een subsequence hebben die convergeert naar een bepaald punt in x. Verder weten we ook dat X compact en dus closed is in Y. Dus x zit in X. Dus X is sequentially compact $\square$

Hierna volgt het bewijs dat sequentially compacte metric spaces compact zijn. Daarvoor eerst twee zaken.

Definition 6.4. Laat $\mathcal{U}$ een family van subsets van een metric space X zijn, die een subset $A \subseteq X$ covert. Een **Lebesgue number** voor $\mathcal{U}$ is een reëel getal $\epsilon > 0$ zodat voor elke $a \in A$ geldt dat de open ball $B_\epsilon(a)$ bevat is in een single set uit $\mathcal{U}$

Een voorbeeld hiervan is bijvoorbeeld de open cover van $[0, 1]$: $(-1, 3/4)$ en $(1/4, 2)$. $\epsilon = 1/4$ is nu een Lebesgue getal voor deze cover. Neem bijvoorbeeld een $x \in [0, 1]$, met $0 \leq x \leq 1/2$, dan $x + 1/4 \leq 3/4$ and hieruit volgt dat $(x - 1/4, x + 1/4) \subseteq (-1, 3/4)$, terwijl indien $1/2 \leq x \leq 1$ dan geldt $x - 1/4 \geq 1/4$ en dus $(x - 1/4, x + 1/4) \subseteq (1/4, 2)$. Dit ziet er moeilijker uit dan het is, teken het gewoon uit, dan snap je het direct.

Proposition 28. Elke open cover $\mathcal{U}$ van een bepaalde sequentially compact metric space X heeft een Lebesgue getal.

Als ϵ een Lebesgue getal is voor $\mathcal{U}$ dan is δ dat ook indien $0 < \delta \leq \epsilon$.

Definition 6.5. Gegeven een $\epsilon > 0$ en een metric space X. Een subset $N \subseteq X$ wordt een $\epsilon - net$ voor X genoemd indien de family $\{B_\epsilon(x) : x \in N\}$ X covert.

Een voorbeeld hier van is de verzameling van rasterpunten in het platte vlak (de gehele getallen). Zij vormen een 1-net voor het platte vlak.

Proposition 29. Als (X, d) een sequentially compacte metric space is, dan bestaat er een ϵ-net voor X voor een $\epsilon > 0$.

Hieruitvolgt het belangrijkste:

Proposition 30. Elke sequentially compacte metric space X is compact.

7 Uniform Convergence

Hier volgt een stukje herhaling van een belangrijk gedeelte uit de analyse.

Definition 7.1. (f_n) convergeert puntsgewijs naar f als voor elke x op een bepaald domein D geldt dat $f_n(x)$ naar $f(x)$ convergeert.

$f(x) = x^n$ convergeert bijvoorbeeld naar 0 als $x \in [0, 1)$ en convergeert naar 1 indien $x = 1$.

Definition 7.2. Een sequence (f_n) convergeert uniform naar een functie f op het domein D als voor een gegeven $\epsilon > 0$ er een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zodat $|f_n - f| < \epsilon$ for all $n \geq N$ en voor alle $x \in D$.

Om te laten zien dat $f_n(x) = x^n$ niet uniform convergeert doen we het volgende: Er moet dus een $\epsilon_0 > 0$ bestaan zodanig dat voor elke $N \in \mathbb{N}$ er een $x \in D$ bestaat en een bepaalde $n \geq N$ is zodanig dat $|f_n(x) - f(x)| > \epsilon_0$. Neem bijvoorbeeld $\epsilon_0 = 1/2$. We moeten een x kiezen zodat $|f_N - f| = |x^N - 0| = x^N \geq 1/2$. Nemen we $x = 2^{-1/N}$ dan zien we dat $x^N = 1/2$, en dus dat f_n niet uniform convergeert.

We kunnen de definite ook anders noteren.

Proposition 31. Laat $f, f_n : D \to \mathbb{R}$. Dan convergeert $f_n \to f$ uniform als $M_n = \sup |f_n(x) - f(x)|$ bestaat voor alle voldoende grote n, en $M_n \to 0$ als $n \to \infty$.

7.1 Cauchy criterion

Definition 7.3. Een sequence (f_n) is uniform Cauchy als voor een gegeven $\epsilon > 0$ er een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zodanig dat $|f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon$ voor alle $m, n/geN$ en voor alle $x \in D$. Er geldt dat (f_n) uniform convergeert dan en slechts dan als het uniform Cauchy is op het domein D.

8 Complete metric spaces

De completeness eigenschap van $\mathbb{R}$ zorgt ervoor dat we vergelijkingen kunnen oplossen zoals $x^2 = 2$, wat niet kan in $\mathbb{Q}$. In dit hoofdstuk wordt dit concept veralgemeniseerd naar metrische ruimten.

8.1 Definition en examples

Definition 8.1. Een metrische ruimte X is *complete* als elke Cauchy sequence in X convergeert naar een punt in X.

Enkele voorbeelden om de definitie te gebruiken:

- $\mathbb{R}$ is complete, vanwege het feit dat elke Cauchy sequence convergeert (naar een punt in $\mathbb{R}$)
- $\mathbb{Q}$ is niet complete: elke sequence in $\mathbb{Q}$ die convergeert naar een irrationaal getal in $\mathbb{R}$, zoals bijvoorbeeld $\sqrt{2}$, is een Cauchy sequence die niet convergeert naar een punt in $\mathbb{Q}$
- $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ is niet complete: de sequence $(1/n)$ is een Cauchy sequence die naar 0 convergeert en $0 \not\in (0, 1)$

Proposition 32. Als X, Y metrische ruimten zijn en er bestaat een bijectieve afbeelding $f : x \to Y$ waarbij zowel f als f^{-1} uniform continu zijn, dan geldt het volgende : X is complete $\iff$ Y is complete.

Theorem 8.2. Een complete subspace Y van een metrische ruimte X is closed in X.

Proof. Neem een $x \in \overline{Y}$. Er bestaat een sequence (y_n) die convergeert naar $x \in X$. (y_n) convergeert en is dus Cauchy in Y. Y is complete, dus moet het convergeren naar een punt in y. Dit betekent dat $x \in Y$. Dit geldt voor alle $x \in \overline{Y} \implies Y$ is closed in X, want Y bevat alle elementen uit zijn closure. □

Theorem 8.3. Als X een complete metric space is en Y is een closed subset van X, dan is Y complete.

Proof. Neem een (y_n) Cauchy sequence in Y. X is complete, dus er is een $x \in X$ zodanig dat (y_n) convergeert naar x. Er geldt, vanwege proposition 6.30 (blz 69), dat $x \in Y$. Dit geldt voor alle Cauchy sequences van Y, dus Y is complete. □

Enkele voorbeelden van complete ruimten zijn $[a,b], (-\infty, b], [a, \infty)$. Hieronder volgen nog enkele eigenschappen en stellingen van completeness in metrische ruimten.

Theorem 8.4. Als X compact is, is het complete.

Proof. Neem een Cauchy sequence (x_n) in X. Compactness impliceert sequential compactness. X is sequentially compact, wat betekent dat er een subsequence (x_{n_r}) bestaat die convergeert naar een punt $x \in X$. Het volgende lemma bewijst dat hierdoor de gehele sequence (x_n) convergeert naar x □

Lemma 8.5. Een sequence (x_n) in X die een subsequence (x_{n_r}) heeft die convergeert naar $x \in X$ betekent dat (x_n) ook convergeert naar x.

Proof. Laat d de bijbehorende metriek van X zijn. Stel dat de subsequence (x_{n_r}) convergeert naar $x \in X$. Laat $\epsilon > 0$. Aangezien (x_n) Cauchy is, bestaat er een getal $N \in \mathbb{N}$ zodanig dat $d(x_m, x_n) < \epsilon$ voor alle gevallen waarbij $n, m \geq N$. (x_{n_r}) convergeert naar x, dus er is een getal $R \in \mathbb{N}$ zodat $d(x_{n_r}, x) < \epsilon$ voor alle $r \geq R$. Laat nu $n \geq N$, en kies $r \geq R$ zodanig dat $n_r \geq N$. Nu geldt

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_r}) + d(x_{n_r}, x) < 2\epsilon$$

Dus (x_n) convergeert naar x, hetgene wat we wilden laten zien. □

Theorem 8.6. Het product van twee metrische ruimten (X, d_X) en (Y, d_Y) is complete $\iff (X, d_X)$ en (Y, d_Y) zijn allebei complete

Proof. We mogen d_∞ als metriek gebruiken, waarvan de definitie als volgt is:

$$d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_X(x_1, y_1), d_Y(x_2, y_2)\}$$

$\implies$ Stel nu dat (X, d_X) en (Y, d_Y) complete zijn en $((x_n, y_n))$ is een Cauchy sequence in $(X \times X, d_\infty)$. Dan geldt $d_X(x_m, x_n) \leq d_\infty((x_m, y_m), (x_n, y_n))$. Hieruit volgt dat (x_n) Cauchy is. Op dezelfde manier kun je laten zien dat (y_n) Cauchy is. Omdat (X, d_X) en (Y, d_Y) complete zijn, geldt dat $(x_n) \to x \in X$ en $(y_n) \to y \in Y$, dus $((x_n, y_n))$ convergeert naar $(x, y) \in X \times Y$. Voor een gegeven $\epsilon > 0$ bestaat er een getal $N_1 \in \mathbb{N}$ zodanig dat $d_X(x_n, x) < \epsilon$ voor alle $n \geq N_1$ en er bestaat een getal $N_2 \in \mathbb{N}$ zodanig dat $d_Y(y_n, y) < \epsilon$ voor alle $n \geq N_2$. Nemen we nu een $n \geq \max\{d_X(x_n, x), d_Y(y_n, y)\}$, dan convergeert $((x_n, y_n))$ naar (x, y), omdat er geldt:

$$d_\infty((x_n, y_n), (x, y))) = \max\{d_X(x_n, x), d_Y(y_n, y)\} < \epsilon$$

$\Longleftarrow$ Stel dat $(X \times Y, d_\infty)$ complete is. En laat (x_n) een Cauchy sequence zijn in (X, d_X), en laat y een punt zijn in Y. Je kunt nagaan dat (x_n, y) een Cauchy sequence is in $(X \times Y, d_\infty)$, want $d_\infty((x_m, y), (x_n, y)) = d_X(x_m, x_n)$. Omdat $(X \times Y)$ complete is, convergeert de sequence $((x_n, y))$ naar een punt (x, y'). Het is duidelijk dat $y' = y$ en (x_n) convergeert naar x. Dus (X, d_X) is complete. Dezelfde redenering geldt voor de completeness van (Y, d_Y). $\square$

Hetzelfde geldt voor de het product van een eindig aantal metrische ruimten. Ook geldt hieruit dat $\mathbb{R}^n$ complete is voor alle $n \in \mathbb{N}$.
Een ander voorbeeld is de space $(\mathcal{B}(D, \mathbb{R}, d_\infty)$, de ruimte van alle functies op een domain $D \subseteq \mathbb{R}$ met de sup metriek d_∞. Deze space is complete.

Proposition 33. De space $(\mathcal{B}(D, \mathbb{R}, d_\infty)$ is complete $\iff$ X is complete

8.2 Contraction

Definition 8.7. Als (X, d) een metric space is en $f : X \to X$ is een afbeelding, dan is f een contraction, ook wel Lipschitz afbeelding als voor een bepaalde constante $K < 1$ er geldt dat $d(f(x), f(y)) \leq K d(x, y)$

Er geldt dat elke contraction van een metrische ruimte X uniform continu is.